THÁCH ĐỐ CỦA EUCLIDE

Không có con đường vương giả dẫn đến hình học
Euclide thành Alexandria nói với Ptolemy I, vua Ai Cập năm 306 trước CN.
Không có con đường vương giả dẫn đến hình học
Euclide thành Alexandria nói với Ptolemy I, vua Ai Cập năm 306 trước CN.

Mũi Perpetua nhô lên cao hơn mặt biển một nghìn thước Annh, trên mặt biển Oregon gồ ghề, những đợt sóng lớn của Thái Bình Dương vỗ mạnh vào những vịnh đã lởm chởm bên dưới theo những nhịp điều hòa như một chiếu đồng hồ đang hoạt động. Vươn mình lên không trung bên trên đại dương xanh thẳm, mũi Perpetua thật là độc nhất vô nhị. Một người đúng trên đỉnh mũi đất đó sẽ thấy rõ Trái Đất hình tròn. Đại dương mênh mông phía trước người quan sát hiện lên một đường cong mềm mại uốn khum xuống phía dưới theo mọi hướng mà con mắt có thể nhìn thấy. Khi một con thuyền giăng buồm ra khơi, người quan sát dường như sẽ thấy nó chìm dần, chìm dần xuốn dưới mặt cong của Trái Đất để rồi lúc nào đó sẽ biến hẳn sau quả cấu xanh khổng lồ.

Nếu những người Babylon, Ai Cập, hoặc Hy Lạp cổ đại sống ở bờ biển Oregon, có lẽ lịch sử Toán học và khoa học chính xác đã khác hẳn. Nhưng những người cổ đại này không sống bên bờ Thái Bình Dương và không bao giờ nhìn thấy hình cong của không gian họ đang sống. Người Babylon, và những người Assyria họ hàng của họ, sống trên những miền đất bằng phẳng giữa các con sông Tigris và Eupurates của xứ Babylon, và thế giới của họ bằng phẳng. Từ hàng ngàn tấm bảng đất sét họ để lại, mô tả chi tiết mọi vẻ sinh hoạt trong xã hội vào khoảng 4000 năm trước CN., chúng ta biết rằng người Babylon rất giỏi tính toán chính xác diện tích những thửa ruộng. Họ biết cách làm thế nào để chia thửa ruộng trồng trọt mà họ có thành những hình chữ nhật, sao cho có thể tính diện tích của những hình chữ nhật đó bằng cách nhân hai cạnh với nhau. Họ cũng biết cách làm thế nào để tìm ra diện tích của những thửa ruộc tam giác vuông bằng cách chia diện tích của hình chữ nhật ngoại tiếp làm hai. Người Babylon và người Assyria là những chuyên gia trong lĩnh vực hình học phẳng này. Người Ai Cập cũng rất phát triển trong môn hình học dùng để đánh dấu, chia bôi và tính toán diện tích đất đai. Nhưng họ cũng sống trong một miền đất bằng phẳng và không bao giờ thấy sự cần thiết phải tìm hiểu một bề mặt không bằng phẳng. Ngay cả kim tự tháp cũng là một tác phẩm bậc thầy của hình học bao gồm những đường thẳng trong không gian ba chiều.

Trong thế kỷ thứ 6 trước CN., Pythagore và những người thuộc trường phái của ông trong lãnh địa họ thiết lập nên tại Crotona ở miền Nam nước Ý đã tìm ra những định lý trừu tượng dựa trên nhưng công trình ứng dụng của người Ai Cập và Babylon cổ đại. Vì thế Định lý Pythagore là một sự mở rộng những mô tả Toán học của người Babylon về thế giới hiện thực. Định lý này nói rằng diện tích của một thửa ruộng hình vuông mà cạnh của nó là cạnh huyền của một tam giác vuông sẽ bằng tổng diện tích của hai thửa ruộng hình vuông khác mà cạnh của chúng lần lượt là các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó. Định lý Pythagore có những ý nghĩa quan trọng trong hình học, vì nó có thể được sử dụng để xác định khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm trong không gian Euclide. Trong không gian này, khoảng cách giữa hai điểm là độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm ấy (ngày nay nếu ta biết hiệu số hoành độ của hai điểm và hiệu số tung độ của chúng thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm đó sẽ bằng căn bậc hai của tổng các bình phương các hiệu số đó). Những người theo trường phái Pythagore còn đi xa hơn và khám phá ra số vô tỷ. Họ nhận thấy rằng hai cạnh của tam giác vuông bằng nhau, thì cạnh huyền sẽ là một con số kỳ lạ: căn bậc hai của 2. Đó là số vô tỷ: không thể viết nó dưới dạng một tỷ số giữa các số nguyên. Việc khám phá ra những con số mới không thể hiểu nổi và không có một ý nghĩa nào tương ứng với thế giới hiện thực đã dẫn trường phái Pythagore tới những lĩnh vực Toán học được phát triển mạnh mẽ trong thời đại của chúng ta ngày nay.

Toán học tiếp tục sự phát triển của nó, hai thế kỷ sau Pythagore, Euclide thành Alexandria đã viết cuốn Cơ sở (Elements) – một bộ sách gồm 13 tập được coi là cuốn giáo khoa vĩ đại nhất từ trước tới nay. Các tập của cuốn Cơ sở trình bày toàn bộ lý thuyết hình học – một lý thuyết dẫn dắt sự nghiên cứu Toán học trong suốt 23 thế kỷ cho đến thời đại của chúng ta. Hình học Euclide là một ý đồ trừu tượng hóa các khái niệm về không gian vật lý với mục tiêu sử dụng các tiên đề, định đề, định lý để khảo sát các tính chất chủ yếu của không gian mà những người trong thời cổ đại nghĩ rằng đó là không gian duy nhất.

Trước hết, Euclide định nghĩa những yếu tố cơ bản của hình học như điểm, đường thẳng, mặt phẳng – những khái niệm quen thuộc với bất kỳ ai đã theo học chương trình hình học sơ cấp ngày nay. Sau đó Euclide nêu nên 5 tiên đề chủ yếu:

1) Qua hai điểm chỉ vẽ được 1 đường thẳng;

2) Một đường thẳng có thể kéo dài mãi mãi;

3) Có thể vẽ được một đường tròn nếu biết tâm và bán kính của nó;

4) Mọi góc vuông đều bằng nhau;

5) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo nên những góc cùng phía có tổng nhỏ hơn 180o, thì hai đường thẳng này kéo dài sẽ cắt nhau ở phía có hai góc trong có tổng nhỏ hơn 180o.

Các mệnh đề, hoặc định lý, trong quyển thứ nhất của Euclide bàn về tính chất của đường thẳng và diện tích của hình bình hành, tam giác và hình vuông. Trong khi Euclide chủ yêu sử dụng 4 tiên đề đầu tiên trong các chứng minh, tiên đề 5 không hề được sử dụng trong bất kỳ chứng minh nào. Điều đó cho thấy ngay rằng các định lý của ông vẫn có giá trị nếu tiên đề 5 bị loại bỏ hoặc thay thế bằng một tiên đề khác phù hợp với 4 tiên đề kia. Mặc dù cuốn Cơ sở đã trở thành cuốn sách phổ biến rộng rãi, một cuốn sách đã ảnh hưởng đến tư tưởng Tây phương trong suốt hai thiên niên kỷ, tính chất tinh tế và bí mật của tiên đề 5 vẫn làm dấy lên nhưng câu hỏi dai dẳng trong ý nghĩ của các nhà Toán học. Ngay cả cách phát biểu của tiên đề 5 cũng thật là lủng củng trong khi 4 tiên đề kia đều ngắn gọn súc tích và rõ ràng thì tiên đề 5 quá dài dòng. Đối với nhiều người, tiên đề 5 có vẻ như là một định lý phải được chứng minh thay vì một sự thật hiển nhiên.

Tiên đề 5 có một số cách phát biểu tương đương. Một là tiên đề Playfair[1], nói rằng qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Cách phát biểu khác tương đương với tiên đề 5 là tổng ba góc của một tam giác luôn bằng 180o. Cách phát biểu này là một hệ quả của tiên đề 5 và là cách phát biểu dễ nhớ nhất.

Ngay từ khi cuốn Cơ sở mới ra đời, các nhà hình học đã ngờ vực sự cần thiết của tiên đề 5 hoặc thậm chí nghi ngờ tính hiển nhiên đúng của nó trong toàn bộ lý thuyết này. Người đầu tiên có những nhận định quan trọng về Euclide là một nhà hình học, mà nhờ ông chúng ta mới được biết khá nhiều về lịch sử của cuốn sách này. Người đó là Proclus (410 - 485), một triết gia, nhà Toán học và sử học Hy Lạp thế kỷ thứ 5. Theo Proclus, Euclide sống dưới triều đại của vương quốc La Mã thứ nhất tại Ai Cập, tức triều Ptolemy I, và chính nhà vua này đã viết một cuốn sách bàn về tiên đề 5 rắc rối của Euclide, trong đó tìm cách chứng minh tiên đề 5 dựa trên 4 tiên đề kia. Đây là một cố gắng đầu tiên, thông qua các nguồn lịch sử, mà chúng ta được biết về ý đồ chứng minh tiên đề

5 như một hệ quả của bốn tiên đề đầu tiên của Euclide.
Khi trình bày lịch sử công trình của Euclide, Proclus đã nhận định rất chính xác rằng những chứng minh của Ptolemy thực ra đã sử dụng một giả định khác tương đương với tiên đề 5: qua một điểm không nằm trên một đường thẳng chỉ có thể kẻ được một đường thẳng song song với đường đã cho (chính là tiên đề Playfair đã nói ở trên). Do đó Ptolemy đã cho rằng chứng minh của mình đã chứng tỏ tiên đề 5 là thừa. Nhưng thực ra chứng minh của ông sai (vì sử dụng một tiên đề khác tương đương với tiên đề 5).

Khoa học Ả Rập nở rộ vào thời Trung cổ, sau khi nền văn minh vĩ đại của Hy Lạp cổ đại không còn nữa, và trước khi Âu châu tỉnh lại từ bóng tối trong nhiều thế kỷ. Omar Khayyam (1050 - 1122), người được phương Tây biết đến vì thơ ca, cũng đồng thời là một trong các nhà Toán học nổi bật vào thìươi của ông, đã viết cuốn sách nhan đề Algebra (Đại số). Trong các thế kỷ trước đó còn hai học giả khác người Ả Rập và Ba Tư cũng theo đuổi nghiên cứu Toán học: Al-Khowarizmi (thế kỷ 9) và Al-Biruni (973 - 1048) cũng có nhiều nghiên cứu về lý thuyết đại số. Khi Omar Khayyam chết năm 1122, khoa học Ả Rập đang trong tình trạng xuống dốc. Tuy nhiên, tại Maragha (Iran ngày nay) đã có một nhà Toán học tài năng phi thường: Nasir Eddin Al-Tusi (1201 - 1274), còn gọi là Nasiraddin. Nasiraddin là một nhà Thiên văn của Hulagu Khan, cháu của nhà chinh phục huyền thoại Genghis Khan (Thành Cát Tư Hãn) và là anh em của Kublai Khan. Nasiraddin biên soạn một dị bản các công trình của Euclide bằng tiếng Ả Rập và một luận đề về các tiên đề của Euclide. Giống như các nhà Toán học cổ điển tiền bối cũng như hai nhà Toán học Ả Rập trước ông, ông cũng nghi ngờ tiên đề 5 của Euclide.
Nasiraddin là học giả đầu tiên nhận thấy tầm quan trọng của một tiên đề khác tương đương với tiên đề 5 của Euclide: tổng các góc trong một tam giác bằng 180 độ. Như những người đi trước, Nasiraddin cố gắng chứng minh tiên đề 5 rắc rối của Euclide chỉ là hệ quả của bốn tiên đề trước nó. Và cũng như những người đi trước, Nasiraddin thất bại.
Cuốn sách kinh điển của Euclide được nghiên cứu rộng rãi trong thế giới Ả Rập, dẫn tới những cuộc thảo luận rất trí tuệ về cuốn sách, bao gồm việc thảo luận về tiên đề được song song (tức tiên đề 5), nhưng châu Âu không biết điều đó. Trong những năm 1100 đầu tiên, một nhà du lịch người Anh tên là Adelhard of Bath (1075 - 1160) đã thực hiện một cuộc hành trình từ Tiểu Á đến Ai Cập và Bắc Phi. Ông học tiếng Ả rập trên đường đi, sau đó cải trang như một người theo học Hội giáo rồi vượt qua eo biển Gibralta để đến Tây Ban Nha thuộc Ma Rốc[2]. Adelhard đi tới Cordova khoảng năm 1120 và nhận được một bản sao cuốn Cơ sở bằng tiếng Ả Rập. Ông bí mật dịch cuốn sách của Euclide sang tiếng Latinh, mà măng lén nó qua dãy Pyrenees để vào châu Âu Thiên Chúa giáo. Bằng con đường đó cuối cùng cuốn sách của Euclide đã đến với phương Tây. Nó được sao chép và đến tay các học giả, trí thức, và chỉ đến lúc này người phương Tây mới được biết những nguyên lý nền tảng của hình học mà người Hy Lạp đã biết từ một thiên niên kỷ rưỡi trước đó. Khi kỹ thuật ấn loát ra đời, một trong những cuốn sách đầu tiên được in dưới dạng chữ rập khuôn là cuốn Cơ sở. Khi cuốn sách của Euclide được công bố ở Venice năm 1482, đó là một bản dịch ra tiếng Latinh từ văn bản Ả Rập do Adelhard mang lén. Mãi đến năm 1505, cũng tại Venice. Zamberti mới công bố một dị bản của cuốn Cơ sở được dịch từ văn bản Hy Lạp, do Theon thành Alexandria ghi chép từ thế kỷ thứ 4.
Năm trăm năm đã trôi qua kể từ công trình của Nasiraddin về tiên đề 5, nhưng trong suốt những thế kỷ này Toán học phương Tây đạt được rất ít tiến bộ. Thời Trung cổ không phải là một thời kỳ tốt đẹp đối với Toán học hoặc khao học và văn hóa nói chung. Một thế giới rối ren trong những

cuộc xung đột triền miên và bị bệnh dịch hoành hành không phải là chỗ để theo đuổi tri thức và nghệ thuật. Nhưng năm 1733, một quyển sách nhỏ được viết bằng tiếng Latinh được xuất bản ở Milan. Đầu đề của nó là Euclides ab omni naevo vindicatus (Vứt bỏ mọi thiếu xót trong hình học Euclide). Tác giả cuốn sách là một thầy tu dòng Jesuit tên là Girolamo Saccheri (1667 - 1733). Cuốn sách được công bố vào đúng năm tác giả chết, nhưng đó không phải là một mất mát duy nhất đối với xã hội: cuốn sách mang tính đột phá này lẽ ra đã sớm làm thay đổi nhận thức hình học của nhân loại, nhưng tiếc thay nó vẫn bị chìm khuất trong sự lãng quên của người đời đến hơn một trăm năm sau. Mãi đến năm 1889 nó mới ngẫu nhiên được phát hiện sau khi ba nhà Toán học đã công bố những khám phá độc lập của họ - những khám phá làm thay đổi hình học và cách giải thích hình học. Ba người đó là Gauss, Bolyai, Lobachevsky.
Trong khi giảng dạy và nghiên cứu Triết học tại các học viện Jesuit tại Ý. Girolamo Saccheri đọc cuốn Cơ sở. Saccheri bị chinh phục mạnh mẽ bởi phương pháp chứng minh logic được gọi là reductio ad absurdum (phương pháp phản chứng) mà Euclide đã sử dụng. Phương pháp này được áp dụng rộng rãi trong Toán học ngày nay, bắt đầu bằng việc giả định điều ngược lại với cái cần phải chứng minh, sau đó qua một số bước suy luận logic liên tiếp, người ta hy vọng thu được kết quả mâu thuẫn. Tính mâu thuẫn sẽ chứng tỏ rằng giả định ban đầu là sai, và do đó chứng tỏ điều ngược lại là đúng, và đó là điều phải chứng minh[3]. Saccheri đã biết rõ công trình của Nasiraddin nửa thiên niên kỷ trước đây và những cố gắng của ông trong việc chứng minh tiên đề 5 của Euclide từ bốn tiên đề kia. Lúc này Saccheri nảy ra một ý tưởng xuất sắc, đó là dùng phương pháp reductio ad absurdum để tấn công vào mục tiêu chứng minh tiên đề 5, một mục tiêu đã có từ xa xưa. Ông quyết định sử dụng phương pháp ông ưa thích để chưng minh. Để làm điều đó, ông phải giả sử tiên đề 5 của Euclide không phải là kết quả của bốn tiên đề kia, mà là một tiên đề sai. Đến lúc đo, Saccheri đã thuộc làu tiên đề 5 của Euclide và biết rõ những nỗ lực chứng minh tiên đề đó trong lịch sử, bằng chứng là bản thân ông đã chỉ ra sai lầm trong chứng minh của Nasiraddin, cũng như sai lầm trong chứng minh năm 1663 của John Wallis (1616 - 1703) tại Đại học Oxford.
Thật vậy, Saccheri đã giả sử tiên đề 5 sai, và hy vọng tìm thấy mâu thuẫn. Nhưng tồi ông chẳng tìm thấy mâu thuẫn nào cả, mà ngược lại chỉ thu được kết quả khác thường: có thể có hơn một đường thẳng đi qua một điểm cho trước song song với một đường thẳng cho trước. Từ đó Saccheri đi đến ba kết luận khả dĩ, được phát biểu dưới dạng tương đương với tiên đệ, về tổng các góc trong một tam giác. Cả ba cách phát biểu đó đều phù hợp với bốn tiên đề đầu tiên của Euclide, cách phát biểu thứ nhất dẫn đến một hệ thống trong đó tổng ba góc trong một tam giác bằng 180o (đặc điểm Euclide, theo cách nói ngày nay), cách thứ hai tương ứng với tổng ba góc trong tam giác nhỏ hơn 180o, cách thứ ba tương ứng với tổng ba góc trong tam giác lớn hơn 180o. Ngày nay chúng ta đã biết rằng hai trường hợp sau là hai hệ thống khác nhau của hình học phi-Euclide, mỗi hệ thống đều hợp lý về mặt logic nội bộ và có giá trị về mặt Toán học. Chúng thể hiện quan điểm về những thế giới khác. Saccheri thu được một số kết quả quan trong bên trong những hệ thống này. Nhưng ông không hề biết rằng đó chính là những khám phá mới, và việc chứng minh tiên đề 5 bằng phản chứng thất bại đơn giản chỉ vì hệ thống giả định của ông thực ra không hề sai – thực ra chúng hoàn toàn chính xác về mặt Toán học! Trớ trêu thay, đến lúc những sự thật này được các nhà Toán học công nhận thì Saccheri đã vĩnh biệt thế giới từ lâu rồi.

Tiên đề 5 của Euclide, một tiên đề thách đố và làm thất vọng nhiều thế hệ các nhà Toán học kể từ ngày Euclide đưa nó vào trong sách của ông, thực ra ông đã gói ghém bên trong nó quan điểm cho rằng thế giới là một hình phẳng hoàn hảo. Trong một thế giới như thế, những đường thẳng tồn tại và chúng có thể kéo dài vô hạn, và dù kéo dài đến đâu chăng nữa chúng vẫn luôn thẳng, chẳng hề cong tí nào[4]. Hãy tưởng tượng một mặt rất phẳng, trên mặt phẳng này, qua một điểm cho trước không nằm trên một đường thẳng cho trước có thể vẽ được một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Những đường song song có thể kéo dài mãi mãi đến vô tận nhưng không bao giờ chúng gặp nhau. Trên mặt phẳng này, tổng các góc trong một tam giác bằng 180 độ. Bây giờ tưởng tượng mặt phẳng của bạn như một miếng cao su phẳng, và dưới nó có một quả cầu lớn đội lên, đẩy mặt cao su từ dưới lên trên. Mặt cao su sẽ bị cong theo bề mặt của quả cầu và dần dần biến thành mặt cầu. Điều gì sẽ xảy ra đối với các đường thẳng song song kéo dài? Chúng cũng sẽ bị cong trên mặt cầu và co xu hướng sẽ gặp nhau ở phía kéo dài. Trên mặt cầu không có những đường tròn lớn không cắt nhau. Và ở đây, tông ba góc trong một tam giác sẽ lớn hơn 180 độ. Hãy tưởng tượng một tam giác trên một mặt địa cầu với một đỉnh nằm ở Bắc cực và hai đỉnh kia nằm trên đường xích đạo. Hai cạnh bên là hai kinh tuyến lần lượt đi qua hai đỉnh nằm trên xích đạo. Góc giữa mỗi kinh tuyến với đường xích đạo bằng một vuông, tức 90 độ. Do đó trong tam giác đang xét, hai góc kề đáy (xích đạo) có tổng bằng 180 độ. Vì thế nếu cộng thêm góc giữa hai cạnh bên (kinh tuyến) thì tổng ba góc sẽ lớn hơn 180 độ.

Con đường phát triển của hình học phi-Euclide sau này thực ra đã lặp lại những việc Saccheri đã làm. Nếu như Euclide có dịp đứng trên mũi Perpetua và nhìn thấy Trái Đất hình cầu thì sự phát triển của hình học có thể đã hoàn toàn khác (cũng có thể ông đã biết rằng Trái Đất hình cầu nhưng ông không nhận thức được tầm quan trọng của sự thật này).

Trong khảo sát ở trên, mặt phẳng nguyên thủy của chúng ta bị biến dạng thành hình cầu bởi một quả cầu đẩy nó từ dưới lên. Nhưng cũng có thể làm cho mặt phẳng biến dạng theo kiểu hyperbolic, bằng cách ấn nó ở giữa trũng xuống và căng cách phía xung quanh sao cho áp sát vào một mặt yên ngựa. Trên mặt yên ngựa này, có một số vô hạn các đường "thẳng" song song với một đường thẳng cho trước đi qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng đã cho. Ở đây, tam giác sẽ có dạng: tổng ba góc của nó nhỏ hơn 180 độ.

Saccheri đã đi vào thế giới kỳ lạ này một cách vô thức ngay trước khi ông chết. Nhưng yếu tố quan trọng trong cả hai trường hợp trên, mặt cầu và mặt hyperbolic, là ở chỗ mặt phẳng đã bị biến dạng. Hãy tưởng tượng trên một mặt bàn đá rộng rãi có ba chiếc cần câu bằng thép gắn chụm đầu từng đôi một đểtạo thành một tam giác. Một người nào đó đốt lửa dưới mặt bàn. Sức nóng của lửa sẽ làm biến dạng các cần câu trên mặt bàn, và tam giác sẽ biến đổi: các cần câu sẽ con vì nóng – các góc cọng lại sẽ không bằng 180 độ nữa. Chính Albert Einstein hai thế kỷ sau đã sử dụng thí dụ này để mô tả bản chất phi-Euclide của không gian vật chất.

Đầu thuế kỷ 19, Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), một thiên tài người Đức đã có những đóng góp phi thường cho khoa học, là gương mặt tiêu biểu của thế giới Toán học. Gauss đã dành hàng chục năm để ngẫm nghĩ suy tưởng vấn đề tiên đề 5 của Euclide. Gauss viết rất nhiều công trình quan trọng, nhưng lại công bố rất ít về bài toàn thách đố của Euclide, mặc dù ông đã tốn rất nhiều thì giờ và sức lực cho nó – chúng ta chỉ biết tư tưởng của ông về hình học thông qua các thư từ trao đổi mà thôi. Qua những thư từ này ta biết rằng Gauss hiểu rõ việc đảo ngược 5 sẽ dẫn đến những hình học phi-Euclide.

Trong thời gian học tại Đại học Gottingen danh tiếng, Gauss đã kết bạn với một sinh viên khoa Toán ngươig Hungary là Farkas Bolyai (1775 - 1856). Gauss và Bolyai cả hai đều dành nhiều thì giờ để thử chứng minh tiên đề 5 của Euclide. Năm 1804, Bolyai nghĩ rằng ông đã tìm ra một chứng minh và viết nó thành một bản thảo ngắn rồi ông gửi bản thảo này cho người bạn học cũ của mình. Tuy nhiên, Gauss nhanh chóng tìm thấy một sai lầm trong chứng minh này. Không chịu khuất phục, Bolyai tiếp tục những nỗ lực của mình và vài năm sau lại gửi cho Gauss một chứng minh khác. Chứng minh này cũng sai nốt. Trong khi làm một giáo sư, một nhà viết kịch, một nhà thơ, một nhạc sĩ, và một nhà phát minh, Farkas Bolyai vẫn tiếp tục nghiên cứu Toán học trong suốt cuộc đời của ông bất chấp những cố gắng thất bại trong việc chứng minh tiên đề không thể chứng minh được này. Ngày 15 tháng 12 năm 1802, con trai của Farkas ra đời, đó là Janos Bolyai (1802 - 1860). Farkas viết một bức thư gửi Gauss với tâm trạng rất phấn khởi để khoe việc sinh con trai: "một thằng bé khỏe mạnh và rất xinh xắn với những ưu điểm trời cho: tóc và mày đen, đôi mắt xanh thẳm rực sáng lấp lánh như hai viên châu báu".

Janos lớn lên và được bố dạy Toán. Anh đã nắm bắt được mối bận tâm của ông bố về tiên đề 5 của Euclide và cũng khát khao chứng minh tiên đề đó từ những tiên đề và định đề khác của Euclide. Năm 1817, chàng Bolyai trẻ đỗ vào Học việc kỹ sư hoàng gia tại Vienna, nơi anh đã cống hiến rất nhiều thời gian để theo đuổi mục tiêu say đắm của ông bố là chứng minh tiên đề 5. Đến lúc đó, mặc dù cố gắng một cách thất vọng, bố anh vẫn phải viết thư khuyên can anh đừng nên lãng phí thời gian vào một bài toán bất khả đã từng làm tiêu hao quá nhiều công sức của ông.

Nhưng cậu con trai không dao động trước lời khuyên đó. Anh tiếp tục theo đuổi mục tiêu của mình một cách nồng nhiệt, hy vọng chuộc lại những cố gắng thất bại của ông bố trong nhiều thập kỷ. Năm 1820, Janos Bolyai đi đến một kết luậnđáng kinh ngạc. Thay vì có thể chứng minh như một hệ quả của phần còn lại của hình học Euclide, tiên đề 5 là cánh cổng dẫn tới một khu vườn kỳ diệu: một Khoa học Tuyệt đối về Không gian, như Bolyai gọi nó, trong đó hình học Euclide chỉ là một trường hợp đặc biệt.

Bolyai xuất phát từ cách phát biểu Playfair của tiên đề 5, rằng qua một điểm cho trước ở ngoài một đường thẳng cho trước chỉ có thể kẻ được 1 đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Sau đó Bolyai giả sử tiên đề này không đúng. Giả định này có nghĩa là, anh kết luận, hoặc không có đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho, hoặc có nhiều hơn một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Giả định thứ nhất không xảy ra vì có thể chứng minh qua một điểm cho trước, bao giờ cũng có thể kẻ ít nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho, và chỉ có giả định thứ hai có thể coi là một biến đổi khả dĩ đối với tiên đề 5 của Euclide. Và nếu qua một điểm cho trước không nằm trên một đường thẳng cho trước có hai đường thẳng song song với đường thẳng dã cho thì sẽ có vô số đường thẳng như thế.

Những kết quả rút ra từ giả sử này làm cho chàng Bolyai trẻ tuổi ngơ ngác. Hình học mới của anh cứ thế mà phát triển không hề có mâu thuẫn, không gặp phải trở ngại nào, cứ như thể chính Chúa đã có ý định để cho hình học không gian phải tuân theo con đường phi-Euclide mới lạ đáng kinh ngạc này. Với một cảm hứng đặc biệt, anh nhận thấy rằng có nhiều mệnh đề xuất hiện mà chẳng

liên quan đến bất kỳ một giả định nào về đường song song, và do đó chứng trở thành phổ biến đối với tất cả mọi thứ hình học có thể có Euclide và phi-Euclide. Những mệnh đề này chứa đựng nội dung chủ yếu về bản chất của không gian. Năm 1823, Bolyai, lúc đó mới 21 tuổi, viêt thư cho bố rằng "Con đã sáng tạo ra một vũ trụ mới kỳ lạ từ con số 0".
Cuối cùng, ông bố thể hiện sự ủng hộ bằng cách cho đăng công trình khai phá của con trai dưới dạng một phụ lục trong cuốn sách của ông nhan đề ngắn gọn là Tentamen, xuất bản năm 1832. Gauss, sau khi đọc cuốn sách của hai cha con Bolyai, đã bình luận rằng bản thân ông đã đi đến những kết luận tương tự trong suốt ba thập kỷ rưỡi suy nghĩ về vấn đề tiên đề 5. Nhưng còn một nhà Toán học khác cũng đi đến những kết luận tương tự. Đó là Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856), tốt nghiệp Đại học Kazan năm 1813, một đại học nằm cách Moskva 400 dặm về phía dãy nụi Ural. Sau này ông trở thành giáo sư, rồi năm 1827, hiệu trưởng trường này. Nhờ những nghiên cứu của mình, Lobachevsky trở nên nổi tiếng như một "Copernicus của hình học". Hoàn toàn độc lập với Bolyai, hình học Lobachevsky cũng xuất phát từ việc loại bỏ tiên đề đường song song, tạo nên một cuộc cách mạng đối với hình học. Đầu những năm 1800, khi các công trình của Bolyai, Lobachevsky và Gauss đã được mọi người biết đến, một số nhà Toán học đã gọi hình học mới phi-Euclide này là astral geometry – hình học của những ngôi sao, mặc dù không rõ tại sao lại có cái tên như thế[5].

Trong hình học Bolyai-Lobachevsky-Gauss, tổng ba góc trong tam gia không bằng 180 độ. Và một vòng tròn trong hình học này không phải là một vòng tròn thông thường (mang tính Euclide) trong cuộc sống hằng ngày: ở đây, tỉ lệ giữa chu vi của vòng tròn với đường kính của nó không còn là số Pi nữa.

Dòng tư duy của Einstein đi theo một con đường khởi đầu từ "Ý nghĩ hạnh phúc nhất" trong đời ông. Ngay từ khi còn ở Sở cấp bằng sáng chế Thụy Sĩ, ông đã tiến hành một trong những thí nghiệm nổi tiếng của mình. Đó là một vòng tròn quay trong không gian. Tâm của vòng tròn cố định, nhưng đường biên chu vi của nó quay tròn rất nhanh. Einstein so sánh xem điều gì xảy ra trong một số hệ quy chiếu, một công cụ tiêu chuẩn ông đã sử dụng trong quá trình phát triển Thuyết tương đối đặc biệt. Sử dụng Thuyết tương đối đặc biệt của mình, Einstein kết luận rằng đường biên của vòng tròn sẽ bị co lại khi quay. Có một lực tác động lên đường biên của vòng tròn – lực ly tâm – và tác động này tương tự như tác động của lực hấp dẫn. Nhưng chính sự co ảnh hương rđến đường biên của vòng tròn làm cho đường kính không thay đổi. Do đó, Einstein kết luận, một kết luận làm chính ông phải ngạc nhiên, rằng tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của nó không bằng Pi nữa. Ông suy luận rằng trong sự hiện diện của lực (hoặc trường) hấp dẫn, hình học của không gian là phi-Euclide.

----

[1] John Playfair (1748 - 1819), nhà Toán học người Scotland. Cách phát biểu tiên đề của ông trở thành phổ biến và hiện nay được hầu hết sách giáo khoa hình học trên thế giới sử dụng, kể cả Việt Nam. Từ đó tiên đề 5 của Euclide thường được đồng nhất với tên gọi Tiên đề đường thẳng song song.

[2] Tây Ban Nha bị Ma Rốc xâm chiếm từ những năm 700 và thống trị vài trăm năm tiếp theo. Bắt đầu từ những năm 1000, nhân dân Tây Ban Nha mới nổi lên đanh đuổi người Ma Rốc ra khỏi bờ cõi, và mãi đến năm 1492 cuộc đấu tranh giành độc lập của người Tây Ban Nha mới hoàn toàn

thắng lợi.

[3] Một thí dụ đại số đơn giản của chứng minh phản chứng là bài toán chứng minh căn bậc hai của 2 là số vô tỷ, nghĩa là căn bậc hai của 2 không thể viết dưới dạng phân số của hai số nguyên. Để bắt đầu, giả sử ngược lại, nghĩa là có những số nguyên, a và b, tỷ số của chúng bằng căn bậc hai của 2. Do đó, a2 = 2b2. Không mất tính tổng quát, có thể giả định rằng hai số nguyên đó là những số nguyên tố cùng nhau (không có thừa số chung để đơn giản). Nếu a là lẻ thì lập tức mâu thuẫn, vì 2b2 là một số chẵn (chú ý: bình phương của một số lẻ là lẻ, bình phương của một số chẵn là chẵn). Nếu a chẵn thì a = 2c, với c là một số nguyên nào đó, khi đó ta có a2 = (2c)2 = 4c2. Theo giả sử ta có 4c2 = 2b2, tức là 2c2 = b2, suy ra b chẵn, và do đó a và b có thừa số chung là 2, mâu thuẫn với giả định a và b nguyên tố cùng nhau

[4] Tính vô hạn của đường thẳng năm trong tiên đề 2 của Euclide. Cuối thế kỷ 19, nhà Toán học lớn người Đức G.F.B.Riemann (1826 - 1866) lý luận rằng những đường của Euclide có thể coi là không có biên nhưng không phải là vô hạn. Chẳng hạn một đường tròn lớn trên mặt cầu có thể xem như một đường không có biên nhưng hữu hạn

[5] Năm 1813, Karl Schweikart sử dụng thuật ngữ này để mô tả hình học phi-Euclide cho một người bạn của mình là Gerling, giáo sư thiên văn tại Đại học Marburg, và là một học trò của Gauss