TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT ĐỐI VỚI ĐA THỨC VI PHÂN

TỔNG QUAN

TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

1. Ngoài nước (phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)

Lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng là thành tựu toán học đẹp đẽ nhất của thế kỷ XX mà ngày nay được gọi là Lý thuyết phân bố giá trị hay là Lý thuyết Nevanlinna. Nội dung chính của Lý thuyết phân bố giá trị là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất là mở rộng của Định lý cơ bản của đại số, mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức . Định lý cơ bản thứ hai là mở rộng của Định lý Picard, mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 5 điểm của Nevanlinna.

Cho đến nay, có hai hướng sau đây nhằm mở rộng Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng.

- Xét nghịch ảnh riêng rẽ của điểm cho các hàm và nghịch ảnh của siêu phẳng, siêu mặt cho các ánh xạ chỉnh hình, với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.
- Xét nghịch ảnh của tập hợp điểm cho các hàm với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và p-adic.

Hướng thứ nhất là sự mở rộng tự nhiên của Định lý 5 điểm. Kết quả đầu tiên trong trường hợp phức thuộc về H.Fujimoto. Năm 1975, ông chứng minh được: Nếu hai ánh xạ phân hình khác hằng f, g: có cùng ảnh ngược tính cả bội của 3n+1 siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong thì tồn tại một biến đổi tuyến tính xạ ảnh L của sao cho L(f) = g.

Từ đó, vấn đề xác định duy nhất theo hướng thứ nhất được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của H.Fujimoto, M.Shirosaki, M.Ru, H.X.Yi, P.C.Hu-C.C.Yang, I.Lahiri, G.Dethloff, T.V.Tan, D.D.Thai, Phạm Việt Đức, Sĩ Đức Quang, ...

F.Gross là người khởi xướng hướng thứ hai. Năm 1977, ông đưa ra một ý tưởng mới là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong . Ông đưa ra hai câu hỏi sau:

1) Tồn tại hay không tập S của để với bất kỳ các hàm phân hình f, g thỏa mãn điều kiện Ef (S)=Eg (S) ta có f g?

2) Tồn tại hay không hai tập , i=1,2 của để với bất kỳ các hàm phân hình f, g thỏa mãn điều kiện i=1, 2 ta có f g?

Tập S thoả mãn Điều kiện 1 được gọi là tập xác định duy nhất (viết tắt là URS)

Tương tự thoả mãn điều kiện thứ hai gọi là song xác đinh duy nhất (viết tắt là bi-URS).

Đối với hàm nguyên trong trường hợp phức: Năm 1982, F.Gross và C.C.Yang đã chứng minh tập có vô hạn phần tử là URS. Năm 1994, H.X.Yi lần đầu tiên đưa ra URS hữu hạn gồm 15 phần tử.

Đối với hàm phân hình: Năm 1996, C.C.Yang-P.Li đưa ra ví dụ về URS có 19 phần tử. Năm 1995, E. Mues-M.Reinders đã chứng tỏ tồn tại URS có 13 phần tử. Năm 1998, G. Frank và M.

Reinders xây dựng URS có 11 phần tử. Năm 1996, C.C.Yang-P.Li đã chỉ ra rằng tồn tại bi-URS cho các hàm phân hình phức dạng (S,{ }) trong đó S có 15 phần tử.

Đối với hàm phân hình p-adic : Năm 1999, P.C.Hu-C.C.Yang xây dựng URS có 10 phần tử. Năm 1998, A.Boutaba - A.Escassut chỉ ra tồn tại các cặp bi-URS cho các hàm phân hình dạng ({ },w) với mọi n 5. Khi xét đến bội của ảnh ngược, vấn đề trên được đưa đến việc xác định các tập hợp S sao cho điều kiện Ef (S)=Eg (S) kéo theo f=g. Liên quan mật thiết đến bài toán đó, Hà Huy Khoái, C. C. Yang, A. Escassut,…xét phương trình hàm P(f)=Q(g), trong đó P, Q là các hàm hữu tỷ.

Vấn đề trên đã được nhiều nhà toán học ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1959, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lí A. Cho f là hàm phân hình trên . Nếu và với k là một số nguyên dương nào đó và với mọi , thì f là hằng.

Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman. Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi , thì f là hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và , đã được Clunie kiểm tra đối với . Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.

Tiếp đó, đối với các hàm nguyên f và g, C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó và nhận giá trị

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

Định lí B. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, là một số nguyên và {0}. Nếu và nhận giá trị thì hoặc với hoặc và , ở đó là các hằng số và thỏa mãn .

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt …. Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu định lí chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với với các ước lượng giữa hàm đặc trưng , hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp p- adic , kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J Ojeda. Năm 2008, J. Ojeda đã xét vấn đề nhận giá trị của với T là hàm hữu tỷ. Ở đó, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau:

Định lí C. Cho f là hàm phân hình trên , là một số nguyên và {0}. Khi đó với mọi thì f là hằng.

Gần đây, K. Boussaf - A. Ecassut – J. Ojeda đã bắt đầu nghiên cứu các hàm phân hình trên : , nhận một hàm nhỏ.

10.2. Trong nước (phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)

Ở Việt nam, Hà Huy Khoái là người đầu tiên tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp p-adic. Ông và các học trò đã đưa ra hai định lý chính cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình p-adic. Như đã nói ở trên, một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị (phức và p-adic) là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng (phức và p-adic) qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 5 điểm của Nevanlinna(hoặc tương tự của Định lý 5 điểm cho trường hợp p-adic). Ở trong nước, Vấn đề xác định duy nhất theo hai hướng như đã nói ở 10.1 được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của Trần Văn Tấn, Đỗ Đức Thái, Phạm Việt Đức, Sĩ Đức Quang, Hà Trần Phương, Tạ Thị Hoài An, Vũ Hoài An, Trần Đình Đức, Hà Huy Khoái, Đoàn Quang Mạnh ....

Cho đến nay, các tập bi-URS tốt nhất có thể là dạng ({ },w) với mọi n 4 thuộc về Hà Huy Khoái -Tạ Thị Hoài An.

Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An đã thiết lập các kết quả tương tự cho đơn thức vi phân dạng . Họ đã nhận được kết quả sau:

Định lí D. Cho f là hàm phân hình trên , {0} thỏa mãn điều kiện

với mọi và các số nguyên dương n, k, m. Khi đó f là đa thức bậc < k nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

1. f là một hàm nguyên.
2. và hoặc hoặc .

Đối với Vấn đề xác định duy nhất, năm 1999, Hà Huy Khoái đưa ra giả thuyết: Tập S đủ tổng quát của với # S 7(# S 6) thì S xác định duy nhất cho các hàm phân hình phức(p-adic). Cho đến nay, giả thuyết này chưa được giải quyết.

Tập S thoả mãn Điều kiện 1 được gọi là tập xác định duy nhất (viết tắt là URS)

Tương tự thoả mãn điều kiện thứ hai gọi là song xác đinh duy nhất (viết tắt là bi-URS).

Đối với hàm nguyên trong trường hợp phức: Năm 1982, F.Gross và C.C.Yang đã chứng minh tập có vô hạn phần tử là URS. Năm 1994, H.X.Yi lần đầu tiên đưa ra URS hữu hạn gồm 15 phần tử.

Đối với hàm phân hình: Năm 1996, C.C.Yang-P.Li đưa ra ví dụ về URS có 19 phần tử. Năm 1995, E. Mues-M.Reinders đã chứng tỏ tồn tại URS có 13 phần tử. Năm 1998, G. Frank và M. Reinders xây dựng URS có 11 phần tử. Năm 1996, C.C.Yang-P.Li đã chỉ ra rằng tồn tại bi-URS cho các hàm phân hình phức dạng (S,{ }) trong đó S có 15 phần tử.

Đối với hàm phân hình p-adic : Năm 1999, P.C.Hu-C.C.Yang xây dựng URS có 10 phần tử. Năm 1998, A.Boutaba - A.Escassut chỉ ra tồn tại các cặp bi-URS cho các hàm phân hình dạng ({ },w) với mọi n 5. Khi xét đến bội của ảnh ngược, vấn đề trên được đưa đến việc xác định các tập hợp S sao cho điều kiện Ef (S)=Eg (S) kéo theo f=g. Liên quan mật thiết đến bài toán đó, Hà Huy Khoái, C. C. Yang, A. Escassut,…xét phương trình hàm P(f)=Q(g), trong đó P, Q là các hàm hữu tỷ.

Vấn đề trên đã được nhiều nhà toán học ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1959, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lí A. Cho f là hàm phân hình trên . Nếu và với k là một số nguyên dương nào đó và với mọi , thì f là hằng.

Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman. Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi , thì f là hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và , đã được Clunie kiểm tra đối với . Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.

Tiếp đó, đối với các hàm nguyên f và g, C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó và nhận giá trị

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

Định lí B. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, là một số nguyên và {0}. Nếu và nhận

giá trị thì hoặc với hoặc và , ở đó là các hằng số và thỏa mãn .
Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt …. Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu định lí chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với với các ước lượng giữa hàm đặc trưng , hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp p- adic , kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J Ojeda. Năm 2008, J. Ojeda đã xét vấn đề nhận giá trị của   với T là hàm hữu tỷ. Ở đó, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau:

Định lí C. Cho f là hàm phân hình trên , là một số nguyên và {0}. Khi đó với mọi   thì f là hằng.

Gần đây, K. Boussaf - A. Ecassut – J. Ojeda đã bắt đầu nghiên cứu các hàm phân hình trên : , nhận một hàm nhỏ.

2. Trong nước (phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)

Ở Việt nam, Hà Huy Khoái là người đầu tiên tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp p-adic. Ông và các học trò đã đưa ra hai định lý chính cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình p-adic. Như đã nói ở trên, một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị (phức và p-adic) là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng (phức và p-adic) qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 5 điểm của Nevanlinna(hoặc tương tự của Định lý 5 điểm cho trường hợp p-adic). Ở trong nước, Vấn đề xác định duy nhất theo hai hướng như đã nói ở 10.1 được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của Trần Văn Tấn, Đỗ Đức Thái, Phạm Việt Đức, Sĩ Đức Quang, Hà Trần Phương, Tạ Thị Hoài An, Vũ Hoài An, Trần Đình Đức, Hà Huy Khoái, Đoàn Quang Mạnh ....

Cho đến nay, các tập bi-URS tốt nhất có thể là dạng ({ },w) với mọi n 4 thuộc về Hà Huy Khoái -Tạ Thị Hoài An.

Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An đã thiết lập các kết quả tương tự cho đơn thức vi phân dạng . Họ đã nhận được kết quả sau:

Định lí D. Cho f là hàm phân hình trên , {0} thỏa mãn điều kiện
 với mọi   và các số nguyên dương n, k, m. Khi đó f là đa thức bậc < k nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

1. f là một hàm nguyên.
2. và hoặc hoặc .

Đối với Vấn đề xác định duy nhất, năm 1999, Hà Huy Khoái đưa ra giả thuyết: Tập S đủ tổng quát của với # S 7(# S 6) thì S xác định duy nhất cho các hàm phân hình phức(p-adic). Cho đến nay, giả thuyết này chưa được giải quyết.

MỤC TIÊU

1. Vấn đề nghiên cứu :

1. Vấn đề 1: Giả sử , là hàm phân hình khác hằng và là các tập hợp điểm, P, Q là các đa thức vi phân. Tìm mối liên hệ giữa các hàm , khi biết
2. Vấn đề 2: Tương tự Vấn đề 1 cho trường hợp p-adic.

2. Mục tiêu nghiên cứu :

- Xây dựng định lý chính thứ hai đối với một số kiểu đa thức vi phân.
- Ứng dụng định lý chính thứ hai để đưa ra tập xác định duy nhất cho hàm với điều kiện nêu ở

12.1.

- Biên soạn Giáo trình về Giải tích p-adic dùng các trường đại học có đào tạo đại học, cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành giải tích.

- Phục vụ cho việc đào tạo cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành giải tích tại khoa Toán trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên.

- Ứng dụng định lý chính thứ hai để đưa ra tập xác định duy nhất cho hàm với điều kiện nêu ở 12.1.

- Biên soạn Giáo trình về Giải tích p-adic dùng các trường đại học có đào tạo đại học, cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành giải tích.

- Phục vụ cho việc đào tạo cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành giải tích tại khoa Toán trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên.

NỘI DUNG

Phần 1. Công cụ chủ yếu để giải quyết hai Vấn đề nghiên cứu trên là lý thuyết phân bố giá trị (phức và p-adic) cho đa thức vi phân. Vì thế trước tiên cần tương tự Lý thuyết phân bố giá trị đối với hàm phân hình cho đa thức vi phân:

- Xét nghiệm của phương trình hàm P(f)=Q(g).
- Xây dựng các khái niệm: hàm đặc trưng(hàm độ cao), hàm đếm, hàm xấp xỉ cho đa thức vi phân.
- Đưa ra các định lý chính thứ nhất, thứ hai đối với đa thức vi phân phức(p-adic) :

Các bất đẳng thức giữa hàm đặc trưng(hàm độ cao) với hàm đếm có liên quan đạo hàm cho các trường hợp: , , , .

Phần 2. Đưa ra một số điều kiện mới của tập xác định duy nhất cho đa thức vi phân với các tình huống không tính bội, có tính bội hoặc tính với bội bị chặn, trong các trường hợp phức và -adic: ,   cùng nhận các tập; , cùng nhận cáct tập,   , cùng nhận các tập, , cùng nhận các tập.

- Hệ thống hóa các kết quả nghiên cứu của các tác giả theo hướng nghiên cứu trên để có một Giáo trình phục vụ cho việc giảng dạy sau đại học: cao học và nghiên cứu sinh.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu cơ bản:

Sử dụng Bổ đề đạo hàm loga, các ước lượng giữa hàm đặc trưng (hàm độ cao) với hàm đếm để đưa ra các định lý chính thứ nhất, thứ hai đối với đa thức vi phân phức(p-adic). Nhờ đó, ứng dụng các định lý chính thứ nhất, thứ hai đối với đa thức vi phân đưa ra tập xác định duy nhất cho hàm từ các điều kiện nghịch ảnh của tập hợp điểm qua đa thức vi phân

HIỆU QUẢ KTXH

- Góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy.
- Nâng cao chất lượng đội ngũ cán bộ giáo viên các tỉnh miền núi phía bắc.
- Cung cấp nguồn nhân lực có trình độ cao.

ĐƠN VỊ SỬ DỤNG